Scripta Mathematica, vol. 14, 1948, pp. 189-264.

[Si1756] Simson, R., *Los Seis Primeros Libros, y el Undécimo, y Duodécimo de los Elementos de Euclides - Traducidos de Nuevo Sobre la Versión Latina de Federico Comandino Conforme a la Fiel, y Correctísima Edición de ella Publicada Modernamente por Roberto Simson, Profesor de Matemática en la Universidad de Glasgow: e Ilustrados con Notas Críticas y Geométricas del Mismo Autor,* D. Joachin Ibarra, Impresos de Cámara de S.M., Madrid, 1774.

[Sm1879] Smith, J. H., *Elements of Geometry*, Rivingtons, Waterloo Place, London, 1879.

[Sm61] Smogorzhevskii, A. S., *The Ruler in Geometrical Constructions,* Blaisdell, New York, 1961.

[Ta1895] Taylor, H. M., *Euclid's Elements of Geometry*, Cambridge University Press, 1895.

[To1876] Todhunter, I., *The Elements of Euclid*, Copp, Clarck & Co., Toronto, 1876.

[To84] Toussaint, G. T., "Computational geometric thinking as kinesthetic thinking," *Conference on Thinking,* Harvard University, August 1984.

[Wi1703] Williams, R., *Elements of Euclid Explained and Demonstrated in a New and Most Easy Method*, Globemaker, London, 1703.

by the Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johan Wolfgang Goethe University, Frankfurt am Main, 1985.

[He1883] Heiberg, I. L., *Euclidis Elementa*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1883.

[He28] Heath, Sir T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Cambridge University Press, 1928.

[Kl39] Klein, F., *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry,* Dover Publications, Inc., 1939.

[Ho70] Honsberger, R., *Ingenuity in Mathematics,* Random House, Inc., 1970.

[Ka78] Kayas, G. J., *Euclide: Les Elements*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1978.

[Ko86] Kostovskii, A., *Geometrical Constructions with Compasses Only,* Mir Publishers, Moscow, 1986.

[HS1887] Hall, H. S. and Stevens, F. H., *A Text-Book of Euclid's Elements*, Macmillan and Co., London, 1887.

[La1861] Lardner, D., *The First Six Books of the Elements of Euclid,* H. G. Bohn, Covent Garden, London, 1861.

[Le02] Lemoine, E., *Geometrographie,* C. Naud, Paris, 1902.

[Ma1797] Mascheroni, L., *The Geometry of Compasses,* University of Pavia, 1797.

[Me1701] de Medrano, Sargento General de Batalla Don Sebastian Fernández, *Los Seis Primeros Libros, Once, y Doce, de los Elementos Geométricos del Famoso Filósofo Euclides Megarense, Amplificado de Nuevas Demostraciones,* Casa de Lamberto Marchant, Brussels, 1701.

[Mo1672] Mohr, G., *The Danish Euclid,* Amsterdam, 1672.

[Mo70] Morrow, G. R., *Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements,* Princeton University Press, 1970.

[Pe76] Pedoe, D., *Geometry and the Liberal Arts,* Penguin Books, Inc., 1976.

[Pe1819] Peyrard, F., *Les Oeuvres D'Euclide, Traduites Litteralment*, C. F. Patris, Paris, 1819.

[Pl1831] Playfair, J., *Elements of Geometry; Containing the First Six Books of Euclid,* Bell & Bradfute, Edinburgh, 1831.

[PS85] Preparata, F. P. and Shamos, M. I., *Computational Geometry: An Introduction,* Springer-Verlag, 1985.

[Ru51] Russell, B., *The Autobiography of Bertrand Russell,* Little, Brown & Co., Boston, 1951.

[SA48] Stark, M. E. and Archibald, R. C., "Jacob Steiner's geometrical constructions with a ruler given a fixed circle with its center," (translated from the German 1833 edition),

den buscar construcciones que requieran el menor número de pasos.

10. Reconocimientos

El autor está agradecido a Hossam ElGindy por haber traducido el manuscrito árabe del siglo XI de Ibn al-Haytham [Ha1041], a Mariza Komioti por haber traducido la edición griega definitiva de Heiberg [Ka78], a Kelly Lyons por la copia del libro de Peyrard en la Universidad Queens [Pe1819], a Diane Souvaine, Sue Whitesides and Chee Yap por sus discusiones en este tópico así como a Arnon Avron, Ferran Hurtado y un árbitro por haber provisto varias referencias útiles y a Gregoria Blanco, Jesús Garcia y Alberto Jimenez por ayudar con la traducción de este ensayo del inglés al castellano.

11. Referencias

[AHU74] Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., *The Design and Analysis of Computer Algorithms,* Addison-Wesley, 1974.

[Av87] Avron, A., “Theorems on strong constructibility with a compass alone,” *Journal of Geometry,* vol. 30, 1987, pp. 28-35.

[Av89] Avron, A., “Construction problems - why and how?” *International Journal of Education in Science and Technology,* vol. 20, No. 2, 1989, pp. 273-287.

[Av90] Avron, A., “On strict strong constructibility with a compass alone,” *Journal of Geometry,* vol. 38, 1990, pp. 12-15.

[Ba1705] Barrow, I., *Euclide’s Elements*, E. Redmayne, London, 1705.

[Be71] Beckman, P., *A History of Pi,* The Golem Press, New York, 1971.

[Bu83] Busard, H. L. L., *The First Latin Translation of Euclid’s Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath*, Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983.

[Bu84] Busard, H. L. L., *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid’s* Elements *Commonly Ascribed to Gerard de Cremona*, E. J. Brill, Leiden, The Netherlands, 1984.

[Bu87] Busard, H. L. L., *The Medieval Latin Translation of Euclid’s* Elements *Made Directly From the Greek,* Franz Steiner Verlag Wiesbaden GMBH, Stuttgart, 1987.

[Cl1654] Clavio, C., *Euclidis Elementorum,* Jonae Rosae, Francofurti, 1654.

[CR81] Courant, R. and Robbins, H., *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1981.

[Du90] Dunham, W., *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics,* John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[Di55] Dijksterhuis, E. J., *The First Book of Euclid’s Elementa,* E. J. Brill, Leiden, The Netherlands, 1955.

[Ha1041] Ibn al-Haytham, *On the Resolution of Doubts in Euclid’s Elements and Interpretation of Its Special Meanings,* University of Istanbul, 1041 A.D., facsimile edition published

con respecto al eje imaginario DE y XA es el segmento deseado.

Final

Con el espíritu de Proclus, nosotros invitamos al lector a dar las demostraciones de las dos construcciones dadas más arriba.

9. Conclusiones

Mencionamos para cerrar, que aún el algoritmo del siglo XX, **Algoritmo CO**, queda eclipsado al lado del **Algoritmo Euclides**, en lo que respecta a su robustez frente a los casos singulares. Considérese por ejemplo, el caso donde el punto A está a una distancia igual de B y C. El **Algoritmo Euclides** ejecuta en este caso tan bien como en cualquier otro caso, ya que todo está bien definido. Sin banderines especiales sin embargo, el **Algoritmo CO** puede fallar tratando de trazar una circunferencia con radio cero y después intersectando dos circunferencias una de las cuales tiene radio cero.

Una diferencia obvia entre la geometría computacional moderna y la clásica está en el tema de las cotas inferiores de la complejidad del problema geométrico. Aunque Lemoine [Le02] y otros se ocuparon con definir operaciones primitivas y con tratar de contar el número de tales operaciones envueltas en una construcción, ellos no parecen haber considerado la pregunta de cual es el número mínimo de operaciones requeridas para resolver un problema dado bajo un modelo de computación específico. Por ejemplo, si definimos 1) trazar una línea y 2) trazar una circunferencia como las operaciones primitivas permisibles bajo el modelo computacional del compás y el canto recto, entonces el **Algoritmo Euclides** se toma nueve pasos, **Algoritmo MS** se toma seis pasos mientras que el **Algoritmo CO** se toma solamente cuatro pasos. Sin tener en cuenta su poca robustez, es el **Algoritmo CO** óptimo? En otras palabras, es cuatro una cota inferior de este problema? Es el **Algoritmo Euclides** óptimo entre los algoritmos robustos? No es muy difícil explicar que al menos tres pasos son necesarios. Conjeturamos que al menos cuatro pasos son necesarios.

Esta investigación sugiere que la situación caótica descrita aquí con respecto a la segunda proposición de Euclides, existe también en sus otras proposiciones que tienen casos y a toda la matemática griega. El trabajo presentado aquí sugiere una forma nueva de examinar la matemática constructiva vieja y una nueva forma para los historiadores de las matemáticas y filologos de hacer sus investigaciones. El trabajo presentado aquí tiene también implicaciones educacionales. Ya ha sido planteado que los problemas de construcción de Euclides nos provee con métodos excelentes de enseñarle a los estudiantes de pre-universitario demostraciones constructivas de teoremas de existencia [Av89]. El trabajo presentado aquí sugiere que la geometría constructiva de Euclides puede ser usada como un medio ideal para enseñar la mayoría de los conceptos modernos relacionados con el diseño y análisis de algoritmos, a estudiantes de pre-universitario. En los problemas fáciles los estudiantes pueden demostrar que las construcciones de Euclides son válidas para todas las entradas posibles. Para los problemas más difíciles los estudiantes pueden buscar construcciones que requieran menos pasos. Finalmente, para los problemas verdaderamente desafiantes pue-

F y G.

Paso 5: Trazar una circunferencia con centro G y radio GC.

Paso 6: Trazar una circunferencia con centro F y radio FC.

Estas dos circunferencias se intersectan en C y H, donde H es el punto de reflexión de C deseado con eje L y HA es el segmento deseado.

Final

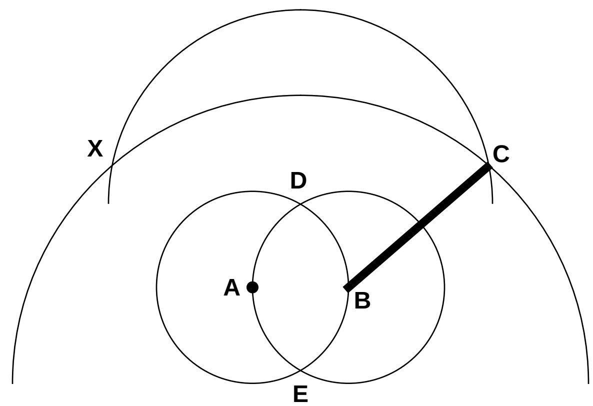

Fig. 8.2: Ilustra la construcción con compás solamente (sin regla).

Recuérdese que en 1672 Jorg Mohr y en 1797 el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni, separadamente, demostraron que todas las construcciones que pueden efectuarse con el canto recto y el compás pueden ser efectuadas con el compás solamente. El lector podrá preguntarse como se podría trazar una recta de largo BC con un extremo en A sin una regla. En el sentido estricto de la palabra esto no es posible por lo tanto en las construcciones donde sólo se utiliza compás, sólo se requiere que para trazar una recta o un segmento, se especifiquen dos puntos sobre la línea o, en el caso de un segmento, que los puntos extremos del segmento sean dados. Un par de puntos así, claramente especifica una línea o un segmento, según el caso, sin ambigüedad. Por lo tanto estamos simulando una línea o un segmento con dos puntos. En este sentido, sería más apropiado de plantear el teorema de Mohr-Mascheroni de la manera siguiente: Una construcción que puede ser efectuada con el canto recto y el compás puede ser simulada con el compás solamente. La construcción de arriba, basada en el principio de simetría, usa ambos, el canto recto y el compás. Es muy apropiado terminar esta discusión presentando una construcción, también basada en el principio de simetría, que utiliza el compás solamente. Presentaremos la construcción descrita en [Ho70] la cual es la primera construcción presentada en Pedoe [Pe76].

Algoritmo CO: [del inglés *Compass Only*]

Sea A el punto dado, y BC el segmento dado. {Se requiere poner en el punto A (como uno de sus extremos) un segmento igual al segmento dado BC} Ver la Figura 8.2.

Comienzo

Paso 1: Trazar una circunferencia con centro A y radio AB

Paso 2: Trazar una circunferencia con centro B y radio BA. {las dos circunferencias se intersectan en D y E.}

Paso 3: Trazar una circunferencia con centro D y radio BC

Paso 4: Trazar una circunferencia con centro E y radio BC

Estas dos circunferencias se intersectan en C y X, donde X es el punto de reflexión de C textuales pueden fracasar miserablemente, las mismas son esenciales para las matemáticas y las ciencias de la computación.

8. Los algoritmos del los últimos años del siglo XX

Para hacer una comparación y para ser completos en esta sección ofrecemos dos construcciones modernas las cuales son esencialmente diferentes de las demostraciones tratadas por Euclides, Herón, Proclus y todos los otros griegos y comentaristas siguientes tanto como las dadas por la plétora de escritores del siglo XIX y del principio del siglo XX. Estas están basadas en la reflexión. Como anteriormente, sea A el punto dado y sea BC el segmento que se desea trasladar de manera tal que A esté en uno de los extremos del segmento. Sin perder generalidad sea B el punto extremo escogido y refiérase a la figura 8.1. La idea es primero construir una línea que corte perpendicularmente al segmento AB y posteriormente efectuar una reflexión del segmento BC con la línea L como eje de reflexión. Nótese que A y C pudieran o no estar en el mismo lado de L, dependiendo de la configuración de entrada del caso particular dado. En cualquier caso, reflejaremos a C con L como eje de simetría para obtener el resultado deseado. Nótese también que el algoritmo de Euclides no da necesariamente un segmento que sea simétrico con relación a L.

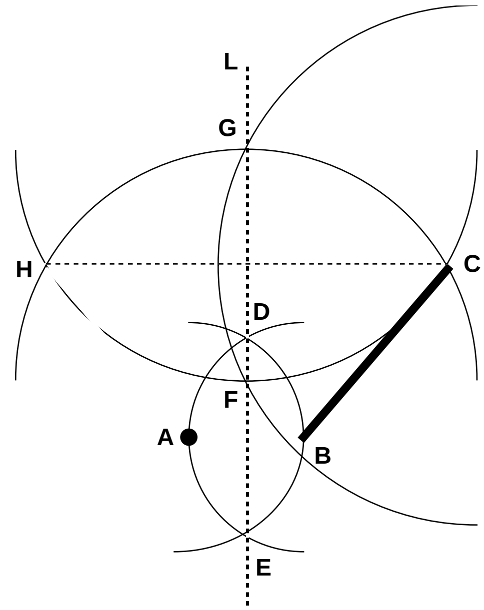

Fig. 8.1: Ilustra el método de reflexión para resolver la *Proposición 2*.

Proposición 2: Poner en un punto dado (como uno de sus extremos) un segmento igual a un segmento dado.

Algoritmo MS: [del inglés *Mirror Symmetry*]

Sea A el punto dado y BC la línea recta dada. {Por lo tanto, se requiere poner en el punto A (como uno de los extremos del segmento) una línea recta igual a la línea recta dada BC}. Ver la Figura 8.1

Comienzo

Paso 1: Trazar la circunferencia con centro A y radio AB.

Paso 2: Trazar la circunferencia con centro B y radio BA.

Paso 3: Trazar una línea L que pase por los puntos D y E, los puntos de intersección de las dos circunferencias trazadas en los pasos 1 y 2.

Paso 4: Trazar una circunferencia con centro C y que intersecte a la línea L en los puntos

Por lo tanto uno puede preguntarse si es a Al-Hajjaj a quien debe culparse. Sin embargo, generalmente se considera que los manuscritos árabes son bien fiables y que otras traducciones en latín de manuscritos árabes, tales como la de Gerardo de Cremona, tienen un algoritmo correcto. Por lo tanto, el dedo parece apuntar hacia Adelard de Bath.

7. El problema de las traducciones de lenguajes

Hay al menos dos formas en las cuales un algoritmo correcto, después de una cierta evolución histórica, puede llegar a ser un algoritmo incorrecto. Un matemático tal como Teón de Alejandría, escribiendo un libro de texto, puede ofrecer un algoritmo substituto y, si no comprende la estructura profunda del algoritmo, puede dar uno incorrecto en su lugar. Otro evento más probable es, que un traductor (que quizás ni siquiera entiende la estructura del algoritmo superficialmente o quien puede depender totalmente de la figura para comprenderlo en parte solamente) inadvertidamente de una traducción incorrecta del algoritmo. Es bien probable que un traductor tal como lo era Adelard de Bath, mirando la figura, pueda haber pensado que "anexar AE en línea recta con AD" no es más que una forma torpe de decir que AD debe ser prolongada, y pudo haber substituido la nueva frase sin haberse dado cuenta que una ambigüedad había sido añadida. El lector puede dudar que, con las descripciones tan elementales y simples de los algoritmos que aparecen en *Los Elementos*, un traductor puede convertirse en un traidor. Un ejemplo eliminará toda duda. La versión griega de *Los Elementos* más exacta y definitiva, la edición de Heiberg, fue traducida en 1978 al francés [Ka78]. El libro [Ka78] contiene, muy convenientemente, todas las proposiciones en los dos idiomas, griego y francés, una al lado de la otra. La introducción contiene una discusión interesante sobre los problemas de traducir la cual parafraseamos en parte.

> "Sin duda es más fácil una traducción textual, pero una actitud tal lleva a serios inconvenientes para entender el texto. Las diferencias linguística entre el griego y el francés por un lado, y la evolución del vocabulario matemático por el otro, son los responsables de llevar al lector a confusión. Con la esperanza de presentar un manuscrito fácilmente accesible hemos optado por una traducción libre, manteniéndonos tan fieles como fue posible, pero dándole más importancia al espíritu del texto que a la letra."

Por consiguiente, esta traducción francesa contiene la descripción siguiente del paso 3 (referirse al **Algoritmo Euclides** y a la figura 4.1):

> "Prolongeons DA suivant AE et BD suivant BF."

Esto textualmente significa "Prolonguemos DA siguiendo AE y BD siguiendo BF. Nótese que la primera parte de esta instrucción (prolonguemos DA y BD) es ambigua y representa un paso hacia la concordancia con las frases de los textos ingleses del siglo XVII, XVII y XIX. Aunque la instrucción completa queda salvada al mencionar explícitamente la A y B en AE y BD respectivamente. Uno puede fácilmente imaginar que estas referencias a la A y la B se pierdan en la traducción siguiente.

Una traducción textual del mismo texto griego da lo siguiente para el paso 3: "Emerjan hacia afuera las líneas AE y BF colinealmente con las líneas DA y DB". Nótese que esto es considerablemente más preciso que la versión francesa y está en acuerdo con los algoritmos correctos ya discutidos. En conclusión, es irónico que en la traducción de Kayas el deseo de ser fiel al espíritu de Euclides lo lleva al camino de traicionar a Euclides. Esto sugiere que, aunque las traducciones

[Sm1879], [HS1887] y [Tal1895] o está basada en los manuscritos en latín del siglo XII de Gerardo de Cremona donde aparece un algoritmo claro y correcto de la segunda proposición de Euclides. Vemos inmediatamente la brillantez de Euclides en prolongar DA y DB en la dirección de A y B para crear un cono con ápice en D, en lugar de prolongar en la dirección de D como fue hecho por Proclus, por ejemplo. Es además fácil de ver que con la ayuda de este cono no existe aquí ningún caso. Los casos considerados y fabricados por los comentaristas de Euclides son producto de una falta de comprensión de la lógica profunda, la cual se cree Euclides tenía en mente cuando escribía estas demostraciones y construcciones. En luz de la creencia establecida a través de la cultura de que muchas demostraciones de Euclides nada más son válidas para ciertos casos y el hecho de qué casi todas las construcciones modernas son ambiguas o incorrectas, es fácil de comprender por que Pedoe [Pe76] escoge sólo uno de estos casos y clama haber dado la prueba original de Euclides, a pesar de que faltaba la construcción crucial del cono mencionado arriba.

Vale la pena mencionar que algunas críticas que se le han hecho a Euclides tienen sentido. El juicio de Russell podría basarse en versiones ambiguas o incorrectas de algoritmos como el de la segunda proposición. Pero también podría referirse a otros casos, e.g., a la proposición 1 donde la representación diagramática parece ocultar/sustituir un postulado de continuidad que asegure la existencia de un punto de intersección entre los círculos implicados.

Cerramos esta sección con la conjetura de por qué tantos libros de texto ingleses de los siglos XVII, XVIII y XIX contienen una versión incorrecta de la segunda proposición de Euclides. Creo que la respuesta se encuentra en la traducción en latín (de un manuscrito árabe de Al-Hajjaj) hecha por Adelard de Bath [Bu83].

Entre los más conocidos ingleses medievales traductores de *Los Elementos* de Euclides estaba Adelard de Bath en el siglo XII. El nombre Adelard de Bath está relacionado con tres versiones distintas de *Los Elementos* y según Busard [Bu83] fué la versión II la que llegó a ser la más popular de las varias traducciones de los Elementos producidas en el siglo XII y aparentemente la que se estudió más en las escuelas. Más aún, esta versión es aparentemente la menos auténtica. Con las palabras de Busard [Bu83] "no sólo los enunciados están expresados de forma diferente, sino que las demostraciones son reemplazadas muy frecuentemente por instrucciones de demostraciones o un bosquejo de la demostración."

Adelard de Bath escribe el paso 3 como a continuación:

"Protrahanturque linee DA y DB directe usque ad L et G."

Sus letras son distintas y son substituidas aquí para que concuerden con la figura 4.1, para facilitar la discusión. Dicho sea de paso, hay un error (probablemente tipográfico) en este manuscrito, i.e., L y G han sido intercambiadas. más seriamente, E y F no existen al igual que la referencia a la prolongación de las líneas AF y BE y la traducción textual dice "Continuar (extender) las líneas DA y DB hasta L y G." Aquí vemos que la oración es tan similar a las que abundan en los libros de texto ingleses del siglo XVII, XVII y XIX que dice "prolongar las líneas DA y DB hasta L y G." Por lo tanto una posibilidad es que Adelard de Bath fuera quien introdujera el error. Sin embargo, es sabido que la revisión de Teón de Alejandría de los Elementos en el siglo IV incluye el cambiar las frases en algunos lugares y algunas veces suplementar otras demostraciones como alternativas. más aún, según Busard [Bu83] todos los manuscritos de Los Elementos conocidos hasta el siglo XIX fueron derivados del texto de Teón. Por lo tanto es posible que Teón sea el culpable aquí. Por otra parte, Adelard de Bath tradujo su manuscrito del manuscrito de Al-Hajjaj en árabe.

no puede ser construido y el algoritmo estaría indefinido y no podría ejecutar. Sin embargo, el contexto de la situación, i.e., el propósito del problema es transferir la distancia. Si A coincide con B o con C, entonces no hay transferencia de distancia, el problema no existe, o si así le gusta, la respuesta, a saber el segmento BC, se conoce desde el comienzo. Por lo tanto, el algoritmo es claramente intencionado para trabajar con todos los puntos A del plano excepto B y C.

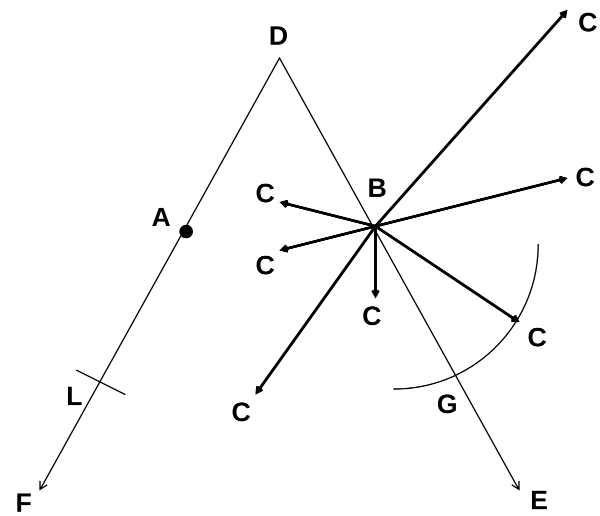

Fig. 6.1: Ilustra la demostración para todos los casos de la *Proposición 2* de Euclides.

El lector pudiera experimentar un efecto interesante al efectuar las construcciones y demostraciones de Euclides enumeradas arriba, y ésta puede ser la sensación Eureka en la cual la esencia, la semántica y la estructura profunda de las construcciones de Euclides se ponen de manifiesto. Una vez que esto pasa, queda transparentemente claro que el algoritmo y su demostración según Euclides son válidas para todos los casos que uno pueda imaginar. De hecho, en vista de lo expresado aquí, queda claro que en realidad no hay casos.

Es difícil agarrar la esencia del algoritmo-demostración fijando una configuración de entrada y luego analizando las variaciones en las construcciones como lo hicieron los comentaristas griegos. Sin embargo, el “truco” siguiente hace la esencia “saltar fuera de la página”. Fijamos la construcción y para esta construcción fija, miramos a todas las configuraciones de entrada posibles. La parte crucial de las construcciones de Euclides (ausente en el algoritmo de Pedoe [Pe76] y ausente también en la mayoría de los seguidores de Euclides) es el *cono* determinado por los rayos DE y DF y haciendo un ángulo de 60 grados en D. Este cono es implícitamente construido por la concatenación del triángulo equilátero DAB y la prolongación construida en el paso 3 desde A hasta F y desde B hasta E. Este cono es tan largo como se quiera y siempre tiene 60 grados. Por lo tanto, considérese a este como fijado en el espacio y refiérase a la Figura 6.1. Ahora el punto A para cualquier configuración siempre tiene que descansar en uno de los rayos DF. También el segmento BC tiene que tener el punto extremo B en el otro rayo DE. Con el compás fijado en B la construcción de Euclides primero marca un punto G en BE tal que BG sea igual a BC. Entonces con el compás fijado en D se marca un punto L en AF tal que DL sea igual a DG. Está claro que para todas las configuraciones posibles del punto A y el segmento BC la construcción es válida. Variaciones de la distancia entre A y B no cambia la esencia de la demostración. más aún, todas las posiciones relativas del segmento BC con respecto a A mantienen su propiedad de cortar BE en G. No interesa si BC es mayor, menor, o igual a AB. Tampoco interesa si C descansa en AB o DB o si coincide con A o D. Por lo tanto, el algoritmo está bien definido y ejecuta en todos los posibles casos. Ya que en todos los casos SB es igual a DA, se deduce que el algoritmo da la solución correcta en todas las configuraciones.

Esta es entonces la lógica de fondo de la demostración de Euclides y, debemos adicionar a pesar de Bertrand Russell [Ru51] y Dunham [Du90], que ésta es válida sin necesidad de la figura. Uno se pregunta si la crítica de Russell sobre Euclides está basada en los algoritmos incorrectos y/o ambiguos escritos por los sabios del siglo XIX entrenados en Cambridge y Oxford tal como siglo XIX y la validez de la construcción depende de la figura.

Otro manuscrito fascinante es un libro árabe titulado *Discusión de dudas en los elementos de Euclides e interpretación de sus significados especiales*, escrito en el 1041 D.C. por Ibn al-Haytham. Una copia de este libro hecha en 1084 D.C. fue encontrada en La Biblioteca de la Universidad de Istanbul [Ha1041]. Como el título sugiere, esto no es una traducción de *Los Elementos* sino una discusión sobre criticismos bien conocidos de los trabajos de Euclides. Al discutir la segunda proposición de Euclides al-Haytham discute cuatro casos básicos con respecto a los tipos de entradas: (1) el punto A es igual a B o C, (2) A descansa en el segmento BC, (3) A descansa en la línea que pasa por BC y (4) A descansa fuera de la línea que pasa por BC. En adición a esto, tiene un caso muy bueno que no aparece mencionado en ningún otro lugar y éste es cuando el segmento BC y el punto A están separados por un valle o un río de forma tal que la línea que une los puntos A y B no puede ser trazada. Su solución a este último caso es más complicada, ya que él habla de que la forma de tratar este problema es medir el segmento y trazarlo en la vecindad del punto, después de lo cual se aplica el algoritmo de Euclides. Parece que a Ibn al-Haytham no le faltaba el sentido del humor en sus escritos matemáticos.

6. El algoritmo de Euclides vuelto a analizar

De la discusión anteriór queda claro que los seguidores de Euclides estaban preocupados por que los algoritmos de Euclides y sus demostraciones de validez no se cumplían para todas las posibles configuraciones de entrada del problema. Creo que los comentaristas mismos sucumbieron a la idea de "guiarse por la figura" más aún que Euclides y que ellos perdieron la esencia, la semántica y la estructura profunda en el fondo de las demostraciones de Euclides.

Primeramente debemos notar que cuando en realidad existen diferentes casos Euclides utiliza una figura para ilustrar la construcción y la demostración en lugar de detallar los casos. Con las palabras de Heath [He28]:

> "Distinguir un número de casos en esta forma era ajeno al verdadero estilo clásico. Por lo tanto, como veremos, el método de Euclides era dar un sólo caso, el más difícil, dejándo al lector proveer los otros casos por sí mismo. Cuando había una distinción verdadera entre los casos, suficiente como para necesitar una diferencia sustanciál en la demostración, acostumbraba a dar los diferentes enunciados y demostraciones todos juntos."

Esta es, en realidad, la convención social seguida en la geometría computacional de hoy en día, donde la frase "los casos restantes pueden ser demostrados en una forma semejante" es visto en casi todos los artículos en las revistas científicas más prestigiosos"

Sin embargo, se conjetura aquí que Euclides no vió ningún caso en la Proposición 2, porque en esencia no hay ninguno. más aún, si el lector sigue el algoritmo original de Euclides en todos los casos fabricados posibles, enumerados en la sección previa, él o ella encontrará que el algoritmo está bien definido en el sentido moderno y ejecutará correctamente y terminará con la solución correcta. Más aún, también pasa la prueba de validez. Esto no puede decirse de ninguno de los algoritmos y demostraciones posteriores ofrecidas por Herón, Proclus y los otros comentaristas griegos de Euclides, tampoco de los sabios ingleses del siglo XIX. Debe ser mencionado aquí que un caso lógico (fuera de contexto) es el caso 1.1.1 donde el punto A descansa en uno de los extremos del segmento BC. Claramente, en esta situación patológica, un triángulo equilátero con lado AB especiales de una configuración inicial de un punto A y un segmento BC. Por ejemplo: Caso 1: A puede descansar en la línea colineal con BC o Caso 2: A descansa en un lado de la línea colineal con BC. En el Caso 1 A puede descansar en el segmento BC (Caso 1.1) o fuera del segmento BC (Caso 1.2). Si A descansa en el segmento BC, entonces en el Caso 1.1.1 éste puede descansar en un punto extremo de BC o en el Caso 1.1.2 en el interior de BC, y en el último caso tenemos otros dos casos más dependiendo de si A está más cerca de B o más cerca de C. Más aún, el Caso 1.2.1 se divide en dos casos más dependiendo de si la distancia entre A y B es mayor o menor que la distancia entre B y C. El Caso 2, en el cual A descansa fuera de la línea colineal con BC también puede ser dividido en casos según una variedad de criterios. Por ejemplo, pudiéramos considerar dos casos dependiendo de si el segmento BC descansa en el ángulo interior (Caso 2.1) o en el ángulo exterior (Caso 2.2) que el triángulo ABD forma en D. Finalmente, cada uno de estos casos determina dos casos más dependiendo de si la distancia entre A y B es mayor que la distancia entre B y C.

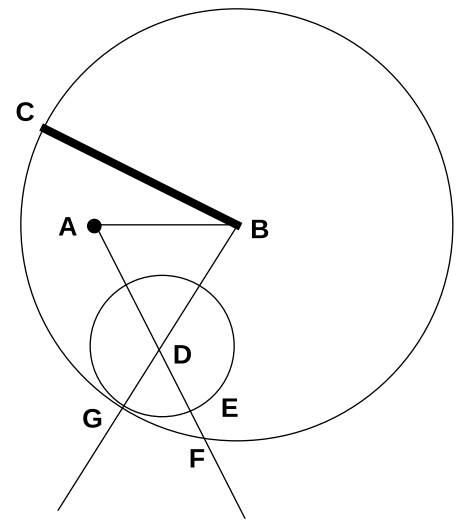

Fig. 5.1: Figura de Proclus para la demostración del *subcaso 2.1* de la *Proposition 2*.

Algunos de los casos de arriba (pero no todos!) fueron discutidos por los comentaristas griegos y están incluidos en los trabajos de Proclus [Mo70]. Por lo general, la demostración de que el algoritmo de Euclides funciona correctamente era dada entonces para el caso particular dado. Algunas veces, el algoritmo dado por Euclides fue cambiado para que pudiera tratar el caso especial. Por ejemplo, para una configuración de entrada del Caso 2.1 con una distancia entre A y B menor que la distancia entre B y C, Proclus objeta el algoritmo de Euclides porque el segmento BC se interpone en la vía de la construcción del triángulo ABD con lado AB (ver la figura 5.1). Con la palabras de Proclus “porque no hay espacio”. Heath [He28] apunta que Herón de Alejandría por los años 100 D.C., en sus comentarios de *Los Elementos*, también usó construcciones diferentes de las de Euclides para evitar objeciones de este tipo. El algoritmo de Proclus para este caso particular sigue a continuación (ver Figura 5.1).

Comienzo

Paso 1: Trazemos una circunferencia con centro en B y radio BC.

Paso 2: Prolonguemos las líneas AD y BD hasta F y G.

Paso 3: Con centro D y radio DG trazemos la circunferencia GE.

[Salir con AE como la solución]

Final

Nótese como Proclus ha cambiado la instrucción clara de prolongación de la línea por la instrucción ambigua (Prolonguemos la línea AD y BD hasta F y G) encontrada en los informes del sa."

Finalmente, con las palabras de Felix Klein [Kl39]:

"Euclides siempre tiene que considerar diferentes casos con la ayuda de las figuras. Ya que él da muy poca importancia a la exactitud de los dibujos geométricos, existe el peligro real de que un alumno de Euclides, producto de una figura mal trazada, llegue a una conclusión errónea."

Una proposición que tiene una gran cantidad de casos y que ha sido sujeto de mucha crítica es en efecto La Proposición 2, el tema de este artículo. Yo creo que la mayor parte de la crítica que Euclides ha recibido se debe a la falta de una comprensión profunda de su trabajo original, en parte por culpa de los escritos de los comentaristas griegos de *Los Elementos*, tales como Herón y Teón de Alejandría y otros revisados por Proclus [Mo70] en el V siglo y exacerbados por una traducción latina por Adelard de Bath de un manuscrito árabe [Bu83] y muchos sabios ingleses del siglo XIX. más aún, si juzgamos el algoritmo original y la demostración de la Proposición 2 utilizando los estándares más altos de hoy en día en el campo de la geometría computacional, Euclides merece estima por su brillantez.

Consideremos entonces, la segunda proposición de Euclides: Colocar en un punto dado (como un extremo) una línea recta igual a una línea recta dada. Claramente, un algoritmo para ejecutar esta tarea tiene que ejecutar, i.e., estar bien definido, para todas las entradas, i.e. para todos los segmentos BC posibles y todos los puntos A, como quiera que estén situados el uno con respecto al otro en el plano. Además, a menos que el algoritmo este diseñado para trabajar con todas las entradas en posición general, este debe ser capaz de manejar las singularidades como cuando el punto A descansa en el segmento BC, o A es equidistante de B y C. Similarmente, una demostración debe establecer que un algoritmo siempre da el resultado correcto. Euclides tenía el habito, como es bien ilustrado en la figura 4.1, de incluir sólo una figura para demostrar la construcción y la demostración. Sería natural que un lector se cuestionara si los pasos del algoritmo tal como está descrito para esa figura funcionarán para una figura completamente diferente. El mismo lector pudiera dudar de si los argumentos en la demostración se mantendrían con las mismas letras, usadas como rótulos de puntos críticos derivados durante la construcción. Esta, en efecto, fue la reacción de los antiguos griegos comentaristas de *Los Elemento*s, quienes criticaron a Euclides por dejar fuera casos que ellos descubrieron que faltaban y entonces proveyeron sus propias demostraciones. Un comentario profundo de *Los Elementos* de Euclides y las críticas posteriores hechas en contra de éste, fue escrito por Proclus [Mo70] en el siglo V. El mismo Proclus no critica a Euclides habitualmente y en varias ocasiones sale hasta en su defensa. Con las palabras de Glenn Morrow [Mo70]:

"Cuando en la demostración del teorema Euclides usa, como de costumbre, sólo un caso, de los dos o más casos posibles, Proclus demostraba, frecuentemente, uno o más de los casos omitidos; algunas veces solamente llama la atención sobre ellos y recomienda que el lector "para la practica" los demuestre él mismo. Algunas veces él da una demostración de un teorema, creado por uno de sus predecesores, con el obvio objetivo de mostrar la elegancia superior y mayor aptitud de la demostración de Euclides."

Es instructivo ilustrar algunas de las objeciones que los comentaristas antiguos tenían y cómo las resolvieron. Primeramente debemos notar que uno puede tratar en conjunto muchos casos es como a continuación:

"Educantur in directo rectis DA recte AE et BF"

Esto se traduce como "Continuar las líneas rectas AE y BF en línea recta con (en la dirección de) las líneas rectas DA y DB" estando así de acuerdo con la versión de Gerardo de Cremona y la edición definitiva de Heiberg.

Como una última evidencia de que el **Algoritmo Euclides** descrito arriba es en realidad el algoritmo original de Euclides consideraremos el así llamado manuscrito P, el manuscrito del Vaticano número 190. Hasta el 1804 todos los manuscritos de *Los Elementos* se creían provenir de la revisión de Teón hecho en el siglo IV. Cuando Napoleón conquistó Italia se robó del Vaticano un manuscrito griego (No 190) de Los Elementos de Euclides el cual mantuvo en La Biblioteca del Rey en París. F Peyrard, un profesor del Liceo Bonaparte, quiso escribir una versión francesa definitiva de Los Elementos utilizando los mejores manuscritos griegos a su disposición y para ese fin obtuvo permiso para utilizar la Biblioteca del Rey. Ahí encontró el manuscrito No 190 y descubrió que tenía en sus manos un manuscrito pre-teoniano hecho en el siglo X. Mientras tanto las fuerzas aliadas derrotaron a Napoleón y obligaron a Francia a devolver todas las obras de artes robadas. A petición del gobierno francés El Papa hizo feliz a Peyrard dándole tiempo a terminar la traducción [Pe1819]. En el manuscrito de Peyrard, en el cual él enfatiza que es una traducción textual, el paso 3 está escrito como "Menons les droites AE, BZ dans la direction de DA, DB" y por lo tanto concuerda con el **Algoritmo Euclides** descrito arriba.

5. Casos en construcciones y pruebas

La discusión de más anterior nos trae naturalmente la cuestión general del análisis de *casos* en las construcciones de Euclides, la geometría computacional moderna y las demostraciones geométricas en general. Debemos notar aquí que cuando hablamos de *casos* hablamos generalmente de *clases de equivalencia* de configuraciones de entrada en lugar de ejemplos de la secuencia de la construcción como el resultado del conjunto de decisiones tomadas como respuesta a las ambigüedades de la descripción del algoritmo, como por ejemplo la clasificación de casos de Taylor [Ta1895] y Lardner [La1861]. Un algoritmo debe ser especificado sin ambigüedad y debe procesar correctamente todas las entradas para las cuales éste fue diseñado. Mucha crítica se ha hecho sobre Euclides en los últimos dos mil años por su alegado descuido en sus demostraciones y construcciones con respecto a la cuestión de los casos. Una cosa de la que él ha sido culpado es de dar demostraciones que dependen severamente de la figura que acompaña a la demostración. Por ejemplo según Bertrand Russell [Ru51]:

> "Una demostración válida mantiene su valor demostrativo cuando no se traza ninguna figura, pero muchas de las demostraciones tempranas de Euclides no pasan esta prueba. El valor de su trabajo como una obra maestra de la lógica ha sido muy exagerado."

También, con las palabras de William Dunham [Du90]:

> En realidad, cuando él se dejó llevar por el diagrama y no la lógica profunda de la prueba, cometió un pecado de omisión. Sin embargo, en ninguna de sus 465 proposiciones comete un pecado de comisión. Ninguna de sus 465 proposiciones es fal-

B y la versión de Pedoe del algoritmo no funcionaría en este caso. Sin embargo, por razones misteriosas, (presentaré una conjetura más tarde) Pedoe deja el paso 3 de la versión del algoritmo de Euclides que aparece más arriba. Este paso crucial en el algoritmo de Euclides construye la prolongación de DA y DB en la dirección de E y F, respectivamente, garantizando así que aunque el largo de BC sea mayor o menor que la distancia entre AB, el algoritmo continua ejecutando y la figura se mantiene igual en el sentido que el punto G existe y descansa sobre BF. Nótese la diferencia significante entre la forma en la cual DA y DB son prolongados en el **Algoritmo Euclides** comparado con el **Algoritmo 19C** y el **Algoritmo T**. En los últimos dos algoritmos la instrucción ambigua dice que “los lados DA y DB del triángulo equilátero deben ser prolongados”. En el **Algoritmo Euclides**, por otra parte, la instrucción en el paso 3, concerniente a la prolongación de DA y DB, no tiene ambigüedad. Esta dice “Sean las líneas rectas AE y BF producidas en líneas rectas con DA y DB”. En otras palabras, ésta especifica que (1) la prolongación debe emanar de A y B (los puntos extremos de la base del triángulo DAB) y (2) las prolongaciones deben ser colineales con (en línea recta con o en la dirección de) DA y DB. En todos los otros textos, donde se pide prolongar DA y DB la frase “en línea recta con DA y DB” es omitida, porque la dirección queda obviamente especificada por la extensión de los lados del triángulo equilátero. En el **Algoritmo Euclides**, por otro lado, extensiones emanando de los lados del triángulo equilátero deben ser tales en cualquier dirección y así la frase “en línea recta con DA y DB” es provista para mayor precisión. El lector escéptico, sin embargo, pudiera insistir a primera vista que la línea recta AE debe ser prolongada en línea recta con DA de manera tal que D descanse en el segmento AE (en otras palabras, AE emana de A en la dirección opuesta a la mostrada en la figura 4.1). Sin embargo, es obvio que si este fuese el caso pretendido, Euclides hubiera usado la frase “Sea la línea recta DE producida en línea recta con AD”. Aquí no queda otra alternativa en cuanto a la dirección de DA y DB como efectivamente en el caso del **Algoritmo 19C**.

En este momento uno podría cuestionarse la autenticidad y corrección de los informes de Heiberg [He1883], Heath [He28] y Dijksterhuis [Di55]. Aquí debemos remarcár que la edición griega de Heiberg es considerada como la edición definitiva aceptada. Esta consiste de porciones tomadas de diferentes manuscritos griegos extendiéndose desde el siglo IX hasta el siglo XII y considerada por los filologos como la más auténtica. También existen algunos manuscritos en latín los cuales son traducciones de manuscritos árabes. Leer la primera edición de la traducción en latín de la versión árabe (Ishaq-Thabit) de los Elementos de Euclides, la cual se cree fué hecha por el monje Gerardo de Cremona en Toledo durante el siglo XII [Bu84] después de su descubrimiento en Bagdad, parece ser más convincente que el examen de las traducciones de los textos en inglés de los siglos XVII, XVIII y XIX. En realidad, aparte del hecho que las letras E y F que aparecen en Heath [He28] no están presentes en [Bu84] y sus papeles asumidos por L y G respectivamente, los algoritmos y demostraciones encontrados en [He1883], [He28] y [Di55] son idénticas a las encontradas en los manuscritos del siglo XII. Los algoritmos del siglo XII son traducciones en latín de traducciones en árabe de un manuscrito griego teoniano. En efecto, todas las traducciones arábigas se creen descender de la revisión de Teón de Alejandría del siglo IV. El que haya jugado al juego de las traducciones se puede sorprender de como estas versiones se asemejan a los manuscritos griegos más viejos con respecto al paso 3 el cual plantea (referirse a la figura 4.1) “Sea la línea recta AE y BF prolongada en línea recta con DA y DB”. En otra traducción en latín siciliano (de autor desconocido) de los Elementos de Euclides hecha directamente del griego [Bu87] el paso 3 que [Be71] “si los libros concuerdan con el Koran eran superfluos; si lo contradecían eran perniciosos.” En breve, muy probablemente, los algoritmos originales de Euclides fueron quemados.

A pesar de la crítica, frecuentemente dirigida a Euclides, uno encuentra difícil de creer que el pudiera haber sido culpable de una equivocación como la que sugiere la versión de Pedoe de su algoritmo. Por otra parte, la concordancia de las descripciones, ejemplificadas por el Algoritmo 19C, dadas por los sabios ingleses tales como Lardner [La1861], Todhunter [To1876], Smith [Sm1879] y Hall y Stevens [HS1887], también como el Algoritmo T de Taylor [Ta1895] y los de los siglos XVII y XVIII, le hacen pensar al lector si los algoritmos de Euclides sufrían de los mismos errores. Sin embargo, establecidas autoridades en Euclides, como Heiberg [He1883], Heath [He28] y Dijksterhuis [Di55] tienen un algoritmo significantemente diferente de los descritos hasta ahora. La figura correspondiente a estos cuatro trabajos es la figura 4.1. y el algoritmo se da debajo. Omitimos la demostración, ya que esta es exactamente la misma que la dada por Pedoe.

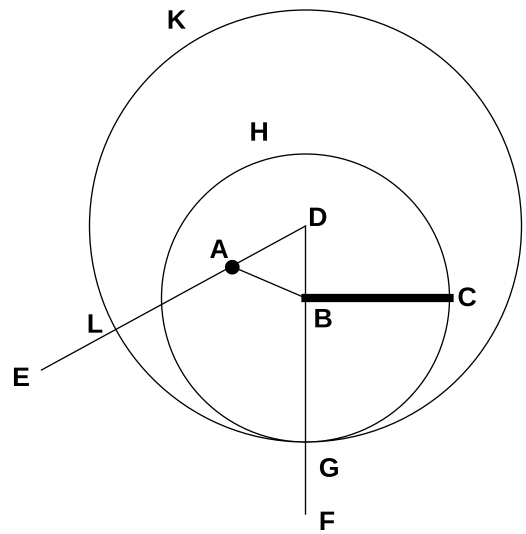

Fig. 4.1: Figura para la demostración de la *Proposición 2* segun Heath.

Proposición 2: Poner en un punto dado (como uno de los extremos del segmento) una línea recta igual a un segmento dado.

Algoritmo Euclides: [Versión de Heath y versión original según el manuscrito del siglo XII de Gerardo de Cremona]

Sea A el punto dado, y BC el segmento dado. {Así que se requiere poner en el punto A (como un extremo del segmento) una línea recta de largo igual al segmento dado BC}. Ver Figura 4.1.

Comienzo

Paso 1: Desde el punto A al punto B trazemos la línea recta AB.

Paso 2: Con lado AB [utilizando **Algoritmo 1**] construyamos el triángulo equilátero DAB.

Paso 3: Sean las líneas rectas AE y BF producidas en líneas rectas con DA y DB.

Paso 4: Con centro B y radio BC trazemos la circunferencia CGH.

Paso 5: Con centro D y radio DG trazemos la circunferencia GKL.

Sea AL la solución buscada.

Final

Nótese que en la figura 4.1 el largo de BC es en realidad mayor que la distancia entre A y

2 en la siguiente manera:

Problema, Proposición 2: Tirar de un punto dado, una línea recta, igual a otra dada.

Algoritmo SFM: [versión de Sebastian Fernández de Medrano]

Comienzo

Sea dado el punto B, y la recta A, con cuyo intervalo, y con centro B, se describirá el círculo DEF, y tirando a cualquier punto de la circunferencia, del punto B, una recta, y sea BD, digo que esta será igual a la dada A.

Final

El Sargento General añade la siguiente discusión después de su demostración.

"Este Problema lo trae Euclides más laborioso, pero algo más difícil de comprender, y siendo tan evidente, me contenté con ejecutarlo así."

Evidentemente, el Sargento General usó un compás *moderno* y no comprendió nada de lo que Euclides quiso establecer con su Proposición 2: que uno puede transferir una distancia con compás *plegable* y sin compás moderno.

4. Construcción de Euclides de acuerdo a Gerardo de Cremona y Peyrard

Uno naturalmente se pregunta: Cuál de estos algoritmos es el que Euclides propuso originalmente? Sería fácil contestar esta pregunta mirando los manuscritos originales de Euclides. Desafortunadamente, la historia ha hecho que esto sea imposible. En el año 332 A.C. Alejandro Magno, a la edad de 24 años, conquistó Egipto y fundó la ciudad de Alejandría. Cuando murió a la edad de 33 años en Babilonia (al sur de lo que hoy es Bagdad), después de haber conquistado el "resto" del mundo, sus generales se dividieron el mundo entre ellos. De esta forma Egipto calló en las manos de Ptolomeo I en el 306 A.C. Ptolomeo II creó la Universidad de Alejandría, la que llegó a ser, gracias a sus excelentes sabios (incluyendo a Euclides) y su impresionante biblioteca (tres cuartos de millón de libros incluyendo la versión original de los Elementos de Euclides) el centro intelectual y científico del mundo. En el 48 A.C. Julio César ocupó Alejandría e intentó llevarse a Roma una gran porción de la biblioteca. La comunidad académica hizo una manifestación la cual fue reprimida por la armada de César. En la consiguiente batalla César le prendió fuego a la flota egipcia en el Puerto Grande. El fuego se extendió hasta los almacenes del puerto y de allí hasta las bibliotecas, donde muchos libros fueron quemados. Más libros fueron quemados durante posteriores revueltas egipcias, una ocurrida en el 272 D.C., reprimida por el emperador Aureliano y otra en el 295 D.C. reprimida por el emperador Diocletiano. En los siglos IV y V el movimiento "el pensamiento políticamente correcto", con el cristianismo como dogma de gobierno, llegó a reinar en Alejandría y celosos obispos cristianos comenzaron a perseguir a los escritores paganos (matemáticos) y a sus libros. El Obispo Theófilo en el 391 D.C. dirigió unas masas de cristianos y destruyó el Templo de Serapis, el cual contenía muchos de los libros restantes. El último matemático vivo en Alejandría, una mujer con el nombre de Hypatia, hija de Teón, fue descuartizada en las calles de Alejandría por unas masas enfurecidas dirigidas por el Obispo Cyril [La41]. Finalmente, los árabes invadieron Egipto en el 646 D.C. y el General Amr ibn-al-As quemó todos los libros alegando tiene cuatro casos en lugar de los ocho de Taylor. Otra regla general, que Lardner insiste sea seguida, es que el centro de la circunferencia construida en el paso 3 debe descansar en la extremidad de BC unida con A en el paso 1, evitando así uno de los problemas de la demostración de Taylor.

Otra variante aparece en un libro escaso mucho más antiguo sobre la geometría de Euclides, publicado en 1831 por John Playfair [Pl1813]. En este libro se nos pide prolongar DA y DB hasta E y F respectivamente y, por lo tanto, la ambigüedad del **Algoritmo 19C** está presente aquí también. Sin embargo, a diferencia del **Algoritmo 19C** y el **Algoritmo T**, el algoritmo que aparece en [Pl1813] primeramente ejecuta la prolongación y después construye las circunferencias.

En los siglos XVIII y XVII juntos el número de ediciones de los Elementos de Euclides publicadas fue menos de la mitad de los publicados en el siglo XIX, aproximadamente 325 y 280 en los siglos XVIII y XVII respectivamente. También es mucho más difícil encontrar copias de estas ediciones antiguas. Yo he tenido en las manos solamente dos ediciones del siglo XVII [Wil703], [Bal705] y una del siglo XVII [CL1654], habiendo encontrado las tres en la colección especial de la biblioteca de la Universidad de Queens en Kingston, Ontario. El manuscrito del 1705 por Isaac Barrow (del colegio Trinity, Cambridge) tiene la distinción especial de (según lo que se proclama en la primera página) contener la primera traducción al inglés del latín. Esto parece contradecir la creencia que la primera traducción inglesa de *Los Elementos* fue traducida por H. Bilingsley, impresa por el famoso impresor inglés John Day y editada en 1570 [Ar50], [Sh28]. Algo que vale la pena notar sobre los algoritmos en los tres textos es que: (1) todos son idénticos entre sí (2) como el **Algoritmo 19C** son ambiguos pero (3) a diferencia de todos los algoritmos que he encontrado, estos no comienzan conectando A con uno de los extremos del segmento BC, sino construyendo una circunferencia de radio BC con centro en uno de los extremos. Entonces, en el paso 2 el punto A se une con el extremo seleccionado como centro en el paso anterior. Nótese que este orden evita el problema que el Algoritmo T tiene con los pasos 1 y 2 y además nos permite ignorar las advertencias de Lardner dirigidas a resolver estos problemas.

Terminamos esta sección mencionando dos muestras en español (castellano). Existe una versión española anónima escrita y publicada en el siglo XVIII [Si1774]. Esta es una traducción de un libro escrito en ingles por Robert Simson, un profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow en 1756, siendo una edición pretendidamente crítica basada en la edición latina de Federico Comandino escrita en 1572. En este algoritmo no existe referencia a la condición: “prolónguense DA y DB” y por supuesto contiene la ambigüedad mencionada, por lo menos en la versión española. Como el algoritmo de Playfair [Pl1813], éste también primeramente ejecuta la prolongación y después construye las circunferencias.

La muestra más fascinante que he encontrado es el libro publicado en Bruselas y escrito por el Sargento General de Batalla Don Sebastian Fernández de Medrano, Director de la Academia Real y Militar de los Países Bajos durante la ocupación española de lo que hoy día se llama Bélgica [Me1701]. El Sargento General se tomó la libertad de amplificar el trabajo de Euclides con nuevas y “mejores” demostraciones. En este libro se encuentra la más corta descripción de la Proposición lados de AB, (3) si DB corta la circunferencia en E e I podemos escoger DE o DI como el radio de la circunferencia con centro D. Por lo tanto hay tres pasos en la demostración y en cada uno de ellos hay dos alternativas: el número total de soluciones del problema es por consiguiente 2x2x2 o sea ocho.”

Ya vemos que la forma de Taylor de tratar las ambigüedades discutidas más arriba es de reconocer explícitamente que, hay ocho casos diferentes que dependen de como se lleva a cabo la construcción, que somos libres de escoger cualquiera de estas 8 vías a través del árbol de decisiones y que los lados DB y DA no necesitan ser prolongados si no es necesario. Para aclarar esta clasificación sigamos una de estas alternativas en la configuración de la entrada ilustrada en la figura 3.2 donde se asume que el largo de CB es mayor que el largo de BA. En nuestra primera alternativa seleccionaremos por lo tanto al segmento AB para construir el triángulo equilátero. Nuestra segunda elección será de construir el triángulo equilátero en el lado mostrado en la figura 3.2. Como la circunferencia no intersecta al triángulo prolongamos el segmento DB el cual corta a la circunferencia en dos puntos D e I. Según Taylor, pudiéramos ahora escoger a DE o DI como el radio de la circunferencia que será trazada con centro D. Seleccionemos DI. Esta circunferencia, con D como centro, intersecta DA en el punto G’, el cual juega el papel de G en su algoritmo, y por lo tanto, según el paso 4, DA no necesita ser prolongado hasta G. Según el algoritmo, entonces, la solución será dada por el segmento AG’, lo cual es claramente incorrecto, ya que AG’ es menor que AB mientras que BC es mayor que AB, por suposición. Por lo tanto, aunque las ambigüedades del **Algoritmo 19C** han sido eliminadas por Taylor, el **Algoritmo T** no siempre da la solución adecuada, dependiendo de la configuración dada para la línea y el punto y de la estrategia de construcción aplicada. Más aún, el **Algoritmo T** padece de un problema adicional ni siquiera presente en el **Algoritmo 19C**. Nótese que el paso 1 en el **Algoritmo 19C** no ofrece alternativa. Sin embargo, **Algoritmo T** pide que el punto A sea unido con una de los vértices del segmento BC, el cual somos libres de escoger. Sin embargo, si decidimos unir A con C (en vez de con B como en la figura de Taylor) entonces es imposible ejecutar el paso 2 y el algoritmo falla.

Otro autor, Lardner [La1861], continua su presentación de un algoritmo ambiguo idéntico al **Algoritmo T**, con una discusión de cómo el estudiante debe tener cuidado con los diferentes casos que se presentan debido a la diversidad de configuraciones de *entrada*. Con sus propias palabras:

> “Las diferentes posiciones que la línea dada puede tener en relación con el punto dado pueden causar cambios tales en el diagrama que pueden llevar al estudiante a cometer errores en la ejecución de la construcción para resolver el problema.
>
> Por lo tanto es necesario que al resolver este problema el estudiante sea guiado por ciertas orientaciones generales, las cuales deben ser independientes de las diferentes disposiciones que puedan asumir las distintas líneas que aparecen en la demostración. Si el estudiante se guía por las orientaciones generales siguientes, ningún cambio que pueda ocurrir en el diagrama lo llevará a cometer errores.”

Lardner, entonces procede presentando seis reglas generales de lo que se puede y no se puede hacer para garantizar que **Algoritmo T** trabaja bien con todas las entradas. Esta discusión incluye un análisis de casos de estrategias de construcción y, al contrario de Taylor [Ta1895], no permite que DA y DB sean prolongadas en ambas direcciones, sino insiste que sean prolongadas a través de la base del triángulo equilátero, concluyendo así, que la segunda proposición de Euclides hubiéramos obtenido un punto de intersección completamente diferente. Un caso semejante ocurre en el paso 6.

Las ambigüedades observadas en los algoritmos descritos en [Sm1879] y en [HS1887], los cuales han sido ejemplificados como el Algoritmo 19C, no aparecen en la exposición de Taylor [Ta1895], ya que a pesar de no aparecer en el cuerpo del algoritmo, posteriormente se indica que tenemos varias alternativas para escoger, como en el paso 1. Por lo tanto es muy instructivo examinar el algoritmo acompañado de la discusión detallada.

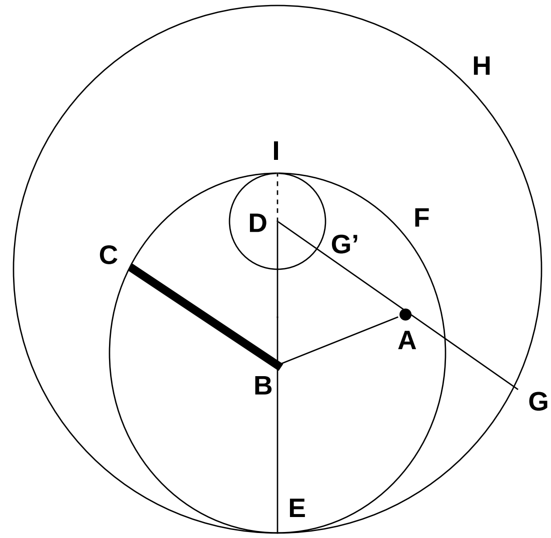

Fig. 3.2: Ilustra la versión de Taylor para demostrar la *Proposición 2.*

Proposición 2: Trazar una línea desde un punto dado igual a una línea dada.

Algoritmo T: [Versión de Taylor]

Sea A el punto dado, y BC la línea dada. {Se requiere trazar una línea recta desde el punto A igual a la línea recta BC}. Referirse a la figura 3.2.

Comienzo

Paso 1: Trazar AB: una línea recta que va desde A hasta una de las extremidades de BC.

Paso 2: Construir un triángulo equilátero DAB.

Paso 3: Con centro B y radio BC trazar la circunferencia CEF, que se corta con DB (prolongada si es necesario) en el punto E.

Paso 4: Con centro D y radio DE trazar la circunferencia EGH, que se encuentra con DA (prolongada si es necesario) en el punto G.

Entonces AG es la línea recta requerida.

Final

Nótese que Taylor ha tomado cuidado de añadir explícitamente en los pasos 3 y 4 la instrucción de que DB y DA serán prolongados *si es necesario*. Por lo tanto asumimos que si la circunferencia CEF intersecta los lados del triángulo equilátero ABD entonces la prolongación DA no necesita ser ejecutada. A diferencia de los libros anteriores del siglo XIX Taylor da la demostración de la Proposición 2 con la siguiente interesante discusión.

> "En esta proposición se asume que la línea recta DB intersecta a la circunferencia CEF. Se puede notar fácilmente que ésta debe intersectarla en dos lugares. Se puede mostrar que en la construcción de esta proposición hay algunos pasos en los que se nos plantean dos alternativas: (1) podemos trazar AB o AC como la línea para construir el triángulo equilátero, (2) podemos construir un triángulo equilátero en ambos

el algoritmo falla.

3. Las construcciones de Euclides en los siglos XIX, XVIII, XVII y XVI

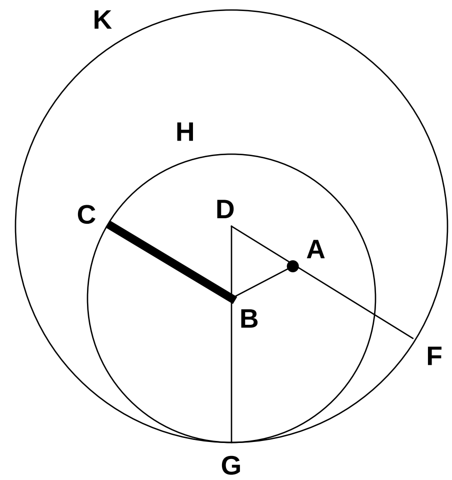

Fig. 3.1: Figura popular del siglo XIX para la demostración de la *Proposición 2.*

Durante el siglo XIX (el cual fue testigo de una venta de más de 700 ediciones de *Los Elementos* de Euclides) existió una gran actividad en Inglaterra con respecto a la escritura de libros de texto sobre *Los Elementos*, para uso en las escuelas y en los colegios. Algunos ejemplares [La1861], [To1876], [Sm1879] y [HS1887] contienen los mismos algoritmos y figuras ilustrativas (sin contar algunas diferencias triviales en la simbología) sobre la segunda proposición de Euclides. Sin embargo, tanto la figura como el algoritmo son bien diferentes de los de Pedoe [Pe76]. Consideremos el algoritmo de una de estas fuentes [HS1887].

Proposición 2: Trazar una línea recta dada a partir de un punto dado.

Algoritmo 19C: [versión popular del siglo 19 ("C" del inglés *Century*)]

Sea A el punto dado y BC la línea recta dada. {Se requiere trazar a partir del punto A una línea recta igual a BC} Ver la Figura 3.1.

Comienzo

Paso 1: Unir A con B.

Paso 2: Con lado AB construir un triángulo equilátero DAB.

Paso 3: Con centro B y radio BC trazar la circunferencia CGH.

Paso 4: Prolongar DB hasta que se corte con la circunferencia CGH en el punto G.

Paso 5: Con centro D y radio DG trazar la circunferencia GKF.

Paso 6: Prolongar DA hasta intersectar la circunferencia GKF en el punto F.

AF es igual a BC.

Final

Este algoritmo es una mejora del algoritmo de Pedoe ya que éste parece trabajar correctamente con ciertas configuraciones de la entrada independientemente de si BC es mayor o menor que BA. Sin embargo, el algoritmo contiene instrucciones ambiguas. El paso 4 nos pide prolongar (alargar) DB hasta que corte a la circunferencia CGH en el punto G, pero no nos dice en que dirección (si a partir de D o a partir de B) debemos alargar DB y en realidad en ambas direcciones vamos a cortar a la circunferencia construida en el paso 3. La Figura 3.1 muestra uno de los casos posibles, pero si hubiéramos prolongado DB en la dirección de B hacia D en lugar de la dirección mostrada, segunda proposición mostrado a continuación él utiliza el Algoritmo 1. Debajo damos la descripción de la versión de Pedoe de la construcción de Euclides.

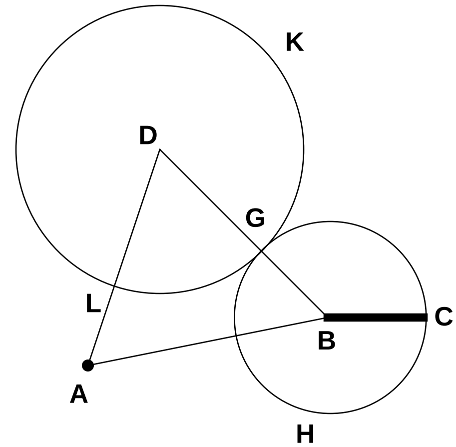

Fig. 2.2: Figura de Pedoe para la demostración de la *Proposición 2.*

Proposición 2: Trazar una línea recta tal que uno de sus extremos sea un punto dado A y que sea igual a una línea recta dada.

Algoritmo P: [versión de Pedoe]

Sea A el punto dado, y BC la línea recta dada. {Así que se requiere poner la línea recta BC en el punto A (como un extremo)} Ver la Figura 2.2.

Comienzo

Paso 1: Trazemos una recta desde el punto A al punto B.

Paso 2: Con lado AB (utilizando el Algoritmo 1) construir el triángulo equilátero DAB.

Paso 3: Con centro B y radio BC construir la circunferencia CGH.

Paso 4: Con centro D y radio DG construir la circunferencia GKL.

Terminar con AL como solución.

Final

Demostración

Como el punto B es el centro de la circunferencia CGH, BC es igual a BG. Como el punto D es el centro de la circunferencia GKL, DL es igual a DG y DA es igual a DB. Por lo tanto, la diferencia AL es igual a la diferencia BG. Dos cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí. Por lo que AL es igual a BC. Por lo tanto, por el punto A hemos trazado la línea recta AL igual a la línea recta dada BC. Q.E.D.

Final de la demostración

Aclaramos aquí que la figura de Pedoe, mostrada en la Figura 2.2 es considerablemente diferente de las figuras que muestran otras presentaciones del trabajo de Euclides como las de Heiberg [He1883], Heath [He28] y Dijksterhuis [Di55], por ejemplo. Más serio aún, es el hecho que el Algoritmo P dado por Pedoe es incorrecto. Está claro que para obtener una solución con el Algoritmo P es crucial que la circunferencia con centro B y radio BC intersecte DB en el punto G. De otra manera el punto G quedaría indefinido y el resto del algoritmo no tendría sentido. Ahora consideremos lo que sucede cuando el largo BC es mayor que la distancia de A a B. Claramente la circunferencia con centro en B y radio BC englobaria en su interior al triángulo ABD y la construcción no sería posible. En jerga moderna, el algoritmo no está bien definido para tal entrada y teriormente las siguientes demostraciones y algoritmos son presentados.

Proposición 1: Construir un triángulo equilátero con una línea recta dada

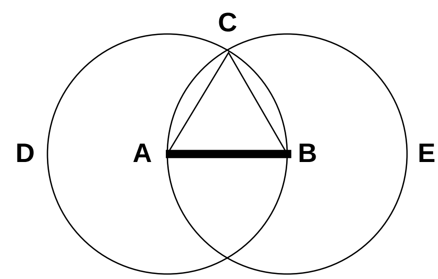

Fig. 2.1: Figura de Euclides para la demostración de la *Proposición 1*.

Algoritmo 1:

Sea AB la línea recta dada.

{O sea, es necesario construir un triángulo equilátero con lado AB}. Ver la Figura 2.1.

Comienzo

Paso 1: Trazemos la circunferencia BCD con centro A y radio AB

Paso 2: Trazemos la circunferencia ACE con centro B y radio AB

Paso 3: Desde el punto en que se cortan las dos circunferencias, punto C, trazemos las dos rectas CA y CB.

Final

Demostración

Como el punto A es el centro de la circunferencia CDB, AC es igual a AB. Como el punto B es el centro de las circunferencia CAE, AB es igual a BA. Pero CA es igual a AB, por lo tanto, las dos rectas CA y CB son iguales a AB. Dos cosas que son iguales a una tercera tienen que ser iguales entre sí, por lo tanto, CA es igual a CB. Así tenemos que las tres líneas rectas CA, AB y BC son iguales entre sí. O sea, el triángulo ABC es equilátero con lado AB. Q.E.D.

Final de la Demostración

Por supuesto, ni Euclides ni Pedoe utilizan las palabras *algoritmo*, *comienzo* ni *final*. Tampoco utilizan las frases *prueba de veracidad* (demostración) y *final de la demostración* ni dividen el algoritmo en porciones nombrándolas con la palabra *Paso* tal y tal. Sin embargo, manuscritos antiguos en latín encabezan las construcciones con las frases "*exempli causa*" y las demostraciones con la frase "*probatio eius*". Hemos incluido estos términos bien conocidos en la Computación, para una mayor claridad en la exposición y para indicar que estas divisiones aparecieron en al menos las más antiguas traducciones árabes y latinas de *Los Elementos* de Euclides. Lo más importante es que Euclides siempre daba el algoritmo primero y los argumentos para justificar o demostrar el algoritmo inmediatamente después. Aún hoy muchos escritores publican algoritmos geométricos sin incluir la demostración a pesar de la gran cantidad de algoritmos geométricos falsos que se han encontrado [To84]. Estos autores pudieran tomar una lección de Euclides. Algunas veces, como veremos más adelante, los algoritmos en *Los Elementos* contienen pasos innecesarios para obtener la solución, pero estos pasos tienen la ventaja de simplificar la demostración. Euclides también hizo uso de otra costumbre en la computación moderna: subrutinas. En el algoritmo de la

Entre las máquinas típicas que han sido utilizadas en el pasado, desde Euclides, se encuentran: (1) el canto recto (the *straight edge*), (2) la regla (el canto recto con marcas de distancia), (3) el compás plegable, (4) el compás moderno, 5) el compás de abertura fija, (6) el compás con abertura máxima, y (7) el compás con abertura mínima, por sólo mencionar algunos [Sm61], [Ho70], [CR81], [Ko86].

El compás plegable merece más explicación aquí. Con el compás moderno uno puede abrirlo, mantenerlo con una abertura escogida y levantarlo del plano de trabajo para trazar en otro lugar una circunferencia con el radio escogido. Esta operación no es permitida con el compás plegable. El compás plegable es, como las otras máquinas, una máquina idealizada que permite trazar una circunferencia con un radio arbitrario pero no se permite transportar las distancias o aberturas. Es como si cuando el compás se levanta del plano de trabajo se le perdiera la abertura inicial que tenía. Por supuesto máquinas más complejas pueden obtenerse combinando máquinas más simples. Por ejemplo, en *Los Elementos* de Euclides este usa el canto recto y el compás plegable (la combinación de las máquinas (1) y (3) como su modelo de computación. Se han hecho también intentos de especificar las operaciones primitivas permitidas con cada tipo de máquina [Le02] y de diseñar construcciones que contengan una menor cantidad de primitivas que las construcciones originales de Euclides. Otra línea de investigación es el comparar y analizar diferentes modelos de máquinas en cuanto a su poder de computación [Ho70], [CR81], [Av87], [Av90]. Por ejemplo, en 1672 Georg Mohr [Mo1672] y en 1797 el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni [Ma1797] demostraron, independientemente, que cualquier construcción que pueda ser hecha con canto recto y compás puede ser ejecutada con el compás solamente y Jacob Steiner demostró en 1883 que el canto recto es equivalente al compás, si él mismo puede utilizar el compás una vez [SA48]. Para recordarle al lector que el canto recto y el compás no son aún computadoras obsoletas debemos señalar que el resultado de Mohr-Mascheroni fue mejorado en 1987 por Arnon Avron [Av87] de la Universidad de Tel Aviv.

La demostración más temprana de la equivalencia de dos modelos de computación se debe a Euclides en su segunda proposición del Libro I de *Los Elementos* en la cual él establece que el compás plegable es equivalente al compás (moderno). Por lo tanto, en la teoría de la equivalencia de la potencia de modelos de computación, la segunda proposición de Euclides ocupa un lugar singular. Sin embargo, como mucho de los trabajos de Euclides, en particular aquellos que contienen muchos casos, su segunda proposición a recibido mucha crítica a través de los siglos. Aquí se plantea que han sido los comentaristas griegos de Euclides y sus expositores más recientes los que han errados, y que el algoritmo original de Euclides es irreprochable. Ya que esta proposición utiliza la Proposición 1 para obtener una solución, comenzaremos por una descripción de esta última.

2. Las dos primeras proposiciones de Euclides según Pedoe

El libro de Pedoe [Pe76] contiene una discusión muy vivaz de los elementos de la geometría de Euclides aplicada a la pintura, escultura y arquitectura a través de la historia reciente y para ilustrar los elementos de Euclides presenta las dos primeras proposiciones del Libro I de *Los Elementos*. Al principio del libro presenta una demostración y un algoritmo de la Proposición 2, completamente diferente, la cual vamos a considerar al final de este tratado. Sin embargo, más tarde en el libro plantea que "es muy interesante la forma en que aparece en el libro de Euclides". Pos-

UN NUEVO VISTAZO A LA SEGUNDA PROPOSICION DE EUCLIDES

Godfried Toussaint

School of Computer Science
McGill University
Montreal, Quebec
CANADA

Resumen

En los últimos 2300 años ha habido un interés considerable en comparar los diferentes modelos de computación en lo que respecta a su poder computacional. Uno de los resultados más conocidos es la demostración de Mohr en 1672 que todas las construcciones que pueden ser ejecutadas con canto recto y compás pueden también ser ejecutadas con compás solamente. La primera demostración que establece la equivalencia de dos modelos computacionales se debe a Euclides en su segunda proposición del Libro I de *Los Elementos* en el cual establece que el compás plegable es equivalente al compás moderno en lo que respecta al poder de computación. Por lo tanto en la teoría de la equivalencia de los modelos de computación la segunda proposición de Euclides juega un papel singular. Sin embargo, como muchos de los trabajos de Euclides, y en particular las construcciones que involucran casos, su segunda proposición ha recibido mucha crítica a través de los siglos. Aquí se plantea que han sido los comentaristas griegos de Euclides y sus expositores más recientes los que han errado y que el algoritmo original de Euclides, según la traducción en latín hecha por Gerardo de Cremona en el siglo XII de unos manuscritos árabes y la traducción francesa de un manuscrito griego pre-teoniano del siglo X, es irreprochable.

1. Introducción

En el estudio moderno comparativo de los algoritmos geométricos es necesario primero definir el modelo de computación, o sea, las características de la máquina que va a ejecutar el algoritmo [PS85]. Un modelo de computación especifica la cantidad de procesadores usados, si son usados de manera secuencial o en paralelo, las operaciones primitivas permitidas y el costo de cada una de estas operaciones. Por ejemplo, una de las máquinas ideales, o modelos abstractos conceptualmente preferidos, en los cuales muchos algoritmos geométricos son comparados, es la RAM Real (Random Access Machine [AHU74]) en la cual cada unidad del espacio de la memoria puede almacenar un número real, de precisión ilimitada y en el cual las operaciones primitivas que pueden ser ejecutadas en la unidad de tiempo incluyen a las operaciones aritméticas, adición, substracción, multiplicación, división, comparación entre números reales, leer y escribir una posición de memoria y posiblemente algunas operaciones más potentes como la enésima raíz, funciones trigonométricas y otras funciones analíticas.

En la geometría constructiva clásica los matemáticos se han ocupado también de definir el modelo de computación, o sea, las características de la "máquina" que va a ejecutar el algoritmo.